
Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Nota :



Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- No se permite el uso de calculadora científica.

Problema 1 (6 puntos)

Considere la superficie de la ecuación

$$z - 1 = \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{4}$$

Dibuje las curvas de nivel cuando $z = 1, 2, 3$ y $z = 4$.

Problema 2 (7 puntos)

Dada la superficie S dada por $f(u, v) = e^u \sin\left(\frac{\pi}{2}v\right)$ siendo $u = 3x - 4y$, $v = 2x^2 - y^2$

- Determinar: $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$
- Usando la regla de la cadena, determinar: $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$
- Determinar el vector gradiente de $grad(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ en el punto donde $x = 4$, $y = 3$

Problema 3 (7 puntos)

Dos insectos A y B vuelan siguiendo las trayectorias de las curvas C_1 y C_2 respectivamente, donde

$$C_1 : r_1(t) = (t^2 - 1, 4t - 4, t^2 - 1) \quad C_2 : r_2(t) = (2t - 1, t^2, 3t - 3)$$

- Determinar en qué punto se cortan las curvas.
- Si $\bar{a}$ es el vector tangente a la curva C_1 en el punto donde $t = 2$ y $\bar{b}$ es el vector tangente a la curva C_2 en el punto donde $t = 2$. Determinar los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.
- Hallar la ecuación cartesiana del plano, que pasa por el punto de corte de las curvas (ítem (a)) y cuyo vector normal es paralelo al producto vectorial de los vectores tangentes a las curvas determinados en el ítem (b).

FORMULARIO:

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta\end{aligned}$$

donde

- a_x , a_y y a_z son los componentes del vector $\vec{a}$ en los ejes X , Y y Z
- $|\vec{a}|$ es el módulo del vector $\vec{a}$, dado por

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

2. Sean el vector

$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{r}$$

donde el vector dirección unitario $\hat{r}$ se puede expresar mediante

$$\hat{r} = \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

donde θ_x , θ_y y θ_z son los ángulos que el vector $\vec{r}$ forma con los ejes X , Y y Z , respectivamente.

3. Sea el producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. Recuerde que

- $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(90) = 0$, $\sin(90) = 1$

5. La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

6. El vector tangente a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{T}(t)$, donde

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

y el vector normal a $\vec{r}(t)$ es el vector $\vec{N}(t)$, donde

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

7. Sea la ecuación del plano H

$$H : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

donde

- $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ es un vector normal al plano
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto que pertenece al plano
- $\vec{r} = (x, y, z)$

de lo cual también puede verse la forma

$$H : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

8. Sea la función $T(x, y, z)$, entonces

- Su diferencial total será

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

- De lo anterior, su variación respecto a una variable t es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- Su gradiente ∇T es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

- Su derivada direccional en la dirección del vector unitario $\hat{v}$ es

$$D_{\hat{v}}T = \nabla T \cdot \hat{v}$$

- Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla T(x, y, z)| \leq D_{\hat{v}}T \leq |\nabla T(x, y, z)|$$

9. Sea el volumen de un cilindro circular recto cuya base tenga un diámetro d y una altura h , su volumen es

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

10. Sea el momento de fuerza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde

- $\vec{r}$ es el vector posición del punto en donde se aplica la fuerza
- $\vec{F}$ es el vector fuerza

11. Sea la ecuación paramétrica de la recta R

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle$$

donde

- $P = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto por el que pasa la recta
- $\langle a, b, c \rangle$ es un vector paralelo a la recta
- t es un parámetro variable