

---

Nombre del docente: \_\_\_\_\_

Alumno:

Apellidos: \_\_\_\_\_ Nombres: \_\_\_\_\_

Sección: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

Nota :



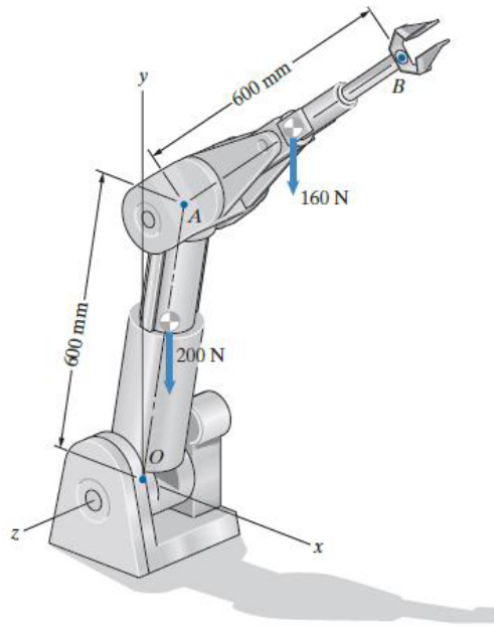
Indicaciones:

- La duración es de 1h 30 min.
- La evaluación consta de 3 preguntas
- No se permite el uso de calculadora científica.

## Problema 1

(8 puntos)

Los pesos de los brazos  $OA$  y  $AB$  del manipulador robótico que se muestra en la figura actúan en sus puntos medios. Los cosenos directores de la línea central del brazo  $OA$  son  $\cos\theta_x = 2/3$ ,  $\cos\theta_y = 2/3$  y  $\cos\theta_z = -1/3$ , mientras que los del brazo  $AB$  son  $\cos\theta_x = 1/3$ ,  $\cos\theta_y = 2/3$  y  $\cos\theta_z = -2/3$ .



- Calcule el vector momento del vector fuerza de 200 N respecto al punto  $O$  en N.m.
- Calcule el vector momento del vector fuerza de 160 N respecto al punto  $O$  en N.m.
- Calcule la suma de estos vectores momentos en N.m.

## Problema 2

(7 puntos)

Un dron vuela alrededor de una ciudad, realizando la trayectoria definida por la siguiente función vectorial:

$$\vec{r}(t) = (4 + 2t)\hat{i} + (t - 1)\hat{j} + (3 + 6t - 3t^2)\hat{k}$$

- Determine el instante “t” en minutos, donde la velocidad del dron es perpendicular a la aceleración.
- La trayectoria del dron se encuentra en el plano S. Determine la ecuación lineal de dicho plano de la forma  $ax + by + cz = d$ , si los vectores velocidad y aceleración se encuentran dentro del plano S.

**Problema 3****(5 puntos)**

Dada la superficie  $S$  dada por  $f(u, v) = e^u \sin(\frac{\pi}{10}v)$  siendo  $u = -3x + 2y$ ,  $v = 2x^2 - 3y^2$

- a) Determinar:  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$
- b) Usando la regla de la cadena, determinar:  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$
- c) Determinar el vector gradiente de  $grad(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$  en el punto donde  $x = 2$ ,  $y = 1$

## **FORMULARIO:**

1. Sea el producto interno o escalar de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta\end{aligned}$$

donde

- $a_x, a_y$  y  $a_z$  son los componentes del vector  $\vec{a}$  en los ejes  $X, Y$  y  $Z$
- $|\vec{a}|$  es el módulo del vector  $\vec{a}$ , dado por

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- $\theta$  es el ángulo que forman los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

2. Sean el vector

$$\vec{r} = |\vec{r}| \hat{r}$$

donde el vector dirección unitario  $\hat{r}$  se puede expresar mediante

$$\hat{r} = \langle \cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z \rangle$$

donde  $\theta_x, \theta_y$  y  $\theta_z$  son los ángulos que el vector  $\vec{r}$  forma con los ejes  $X, Y$  y  $Z$ , respectivamente.

3. Sea el producto vectorial de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

4. Recuerde que

- $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(90) = 0, \quad \sin(90) = 1$

5. La velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

6. El vector tangente a  $\vec{r}(t)$  es el vector  $\vec{T}(t)$ , donde

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

y el vector normal a  $\vec{r}(t)$  es el vector  $\vec{N}(t)$ , donde

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$$

7. Sea la ecuación del plano  $H$

$$H : \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

donde

- $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$  es un vector normal al plano
- $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  es un punto que pertenece al plano
- $\vec{r} = (x, y, z)$

de lo cual también puede verse la forma

$$H : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

8. Sea la función  $T(x, y, z)$ , entonces

- Su diferencial total será

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

- De lo anterior, su variación respecto a una variable  $t$  es

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- Su gradiente  $\nabla T$  es

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k}$$

- Su derivada direccional en la dirección del vector unitario  $\hat{v}$  es

$$D_{\hat{v}}T = \nabla T \cdot \hat{v}$$

- Valores máximos y mínimos de la derivada direccional

$$-|\nabla T(x, y, z)| \leq D_{\hat{v}}T \leq |\nabla T(x, y, z)|$$

9. Sea el volumen de un cilindro circular recto cuya base tenga un diámetro  $d$  y una altura  $h$ , su volumen es

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

10. Sea el momento de fuerza

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

donde

- $\vec{r}$  es el vector posición del punto en donde se aplica la fuerza
- $\vec{F}$  es el vector fuerza

11. Sea la ecuación paramétrica de la recta  $R$

$$R : (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle$$

donde

- $P = (x_0, y_0, z_0)$  es un punto por el que pasa la recta
- $\langle a, b, c \rangle$  es un vector paralelo a la recta
- $t$  es un parámetro variable