

Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo **intento** de copia o sospecha de copia, se anulará el examen **sin opción de reclamo**.

1. Procedimental (20 Puntos)

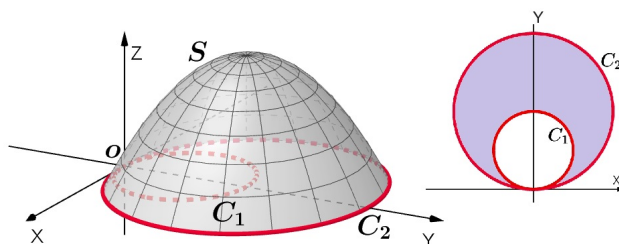
Problema 1 (8 puntos)

Un ingeniero se encuentra diseñando una cámara de enfriamiento para asegurar que la temperatura dentro del espacio varíe de manera controlada en función de las coordenadas, permitiendo así una mejor gestión de los procesos que se lleven a cabo en su interior. La temperatura varía según la siguiente expresión: $T(x, y, z) = 20 - 3x^2 + 7xy + y^2z$ [$^{\circ}C$] donde x representa el desplazamiento horizontal en metros, y representa el desplazamiento vertical en metros y z la altura en metros.

- a) **(2 puntos)** Si el ingeniero se encuentra en el punto $A=(1,2,0)$. ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura en la cámara de enfriamiento disminuya más rápido? y ¿Cuál es el valor de la temperatura mínima?
- b) **(2 puntos)** Se sabe que la temperatura en la base de la cámara está dada por la siguiente función: $T(x, y) = x^2 - \ln(x^2) + y^2$ además $P(-1, 0)$ es un punto crítico de la función temperatura ¿Determine si el punto P es un mínimo, máximo o punto silla? Justificar con el cálculo.
- c) **(2 puntos)** Planteando las ecuaciones necesarias, determine los puntos críticos de la función temperatura del ítem(b).
- d) **(2 puntos)** Debido a un ajuste en el diseño de la cámara de enfriamiento la temperatura cambia a la siguiente expresión: $T(x, y, z) = 3x + y + z$ se quiere determinar las temperaturas extremas (máxima y mínima) en la región $9x^2 + y^2 + z^2 = 27$ generada por un cambio en las condiciones del entorno.

Problema 2 (7 puntos)

En el gráfico se muestra la superficie del paraboloide $S : z = 8y - x^2 - y^2$ sobre el plano XY , las circunferencias de ecuaciones $C_1 : x^2 + (y - a)^2 = a^2$ y $C_2 : x^2 + y^2 = 8y$. Si el radio de C_1 es la mitad del radio de C_2 .

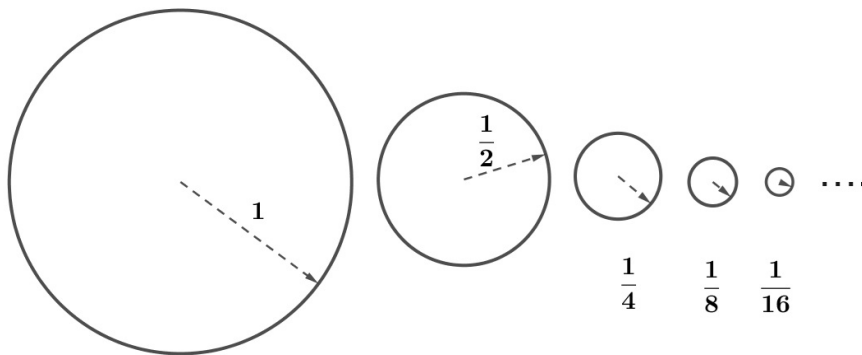


- a) **(3 puntos)** Expresar en coordenadas polares los límites de integración de la región D del plano XY comprendida entre la circunferencia C_1 y C_2 , como la suma o diferencia de dos regiones simples.
- b) **(2 puntos)** Use el ítem (a), para determinar el volumen (cm^3) del contenedor que se encuentra, bajo la superficie del paraboloides y sobre la región D .
- c) **(2 puntos)** Si el costo por almacenar en éste contenedor es 10 dólares por cm^3 , ¿Cuál es el precio que se debe pagar?

Problema 3 (5 puntos)

- a) **(2 puntos)** En la figura se muestran circunferencias de radios $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

Determina la serie que representa la suma de áreas de las circunferencias, identificando el área de la n -ésima circunferencia.



- b) **(2 puntos)** Determine el área total de las circunferencias.
- c) **(1 punto)** Determina a serie de Taylor en torno de $x = 0$ para la función $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- 1) **(1.5 puntos)** Dada la siguiente integral doble: $I = \int_{-4}^0 \int_{-2}^{-\sqrt{-y}} e^{-x^3} dx dy$ grafique la región de integración en coordenadas cartesianas y cambie el orden de integración.
- 2) **(1.5 puntos)** Si se tiene la siguiente serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n4^n}$ Es verdadero o falso las siguientes afirmaciones (Justifique su respuesta con cálculos): a) El radio de convergencia es 4 b) El intervalo de convergencia de la serie es $] -7, 1[$

FORMULARIO:

1. Sea la función $f(x, y)$ el cual tiene una restricción $g(x, y)$, los máximos y mínimos de f serán determinados por los multiplicadores de Lagrange λ , dados por

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

2. Si se tiene una región R que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, entonces al realizar una integral de la función $f(x, y)$ en la región R es posible ver que:

$$\iint_{R_{x,y}} f(x, y) dA = \iint_{D_{r,\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

donde $D_{r,\theta}$ es la región en coordenadas polares.

3. Sea una superficie $S : z = f(x, y)$. El área de esa región es dada por:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dA$$

4. **Criterio de la segunda derivada** Sea una función f con segundas derivadas parciales continuas en una región donde hay un punto (a, b) para el que se cumple $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$; es decir, (a, b) es un punto crítico. Para buscar los extremos relativos, se considera la expresión:

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

- a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.
- b) $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.
- c) $D < 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto silla.
- d) Si $D = 0$ entonces el criterio no lleva a ninguna conclusión.

5. Serie Geométrica

Cada término de ésta serie se generan a partir del término anterior multiplicándolo por una razón r

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

donde

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

6. Serie alternate

Si la serie alternate

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

cumple con

- a) $b_n > 0$ para todo n .
- b) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n .
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

entonces la serie es convergente.

7. Criterio de la razón

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge.
 - b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
 - c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces la prueba no es concluyente; es decir, no se puede obtener conclusión alguna sobre la convergencia o divergencia de la serie.
8. Si f se puede representar como una serie de potencias en a ; es decir, si:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

Entonces sus coeficientes están dados por la fórmula;

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Para el caso en el que $a = 0$, la serie que resulta se le llama **Serie de Maclaurin de f** .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$