

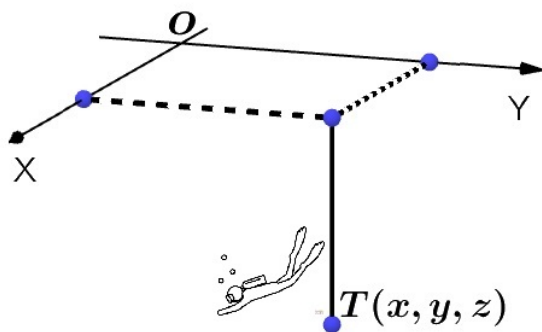
Indicaciones

1. Luego de los 100 minutos del examen, tendrán 10 minutos para subir a Gradescope su desarrollo.
2. El examen tiene 23 puntos pero máximo se podrá obtener 20.
3. No se permite el uso de equipos electrónicos, solo calculadora no programable ni graficadora.
4. Al mínimo **intento** de copia o sospecha de copia, se anulará el examen **sin opción de reclamo**.

1. Procedimental (20 Puntos)

Problema 1 (8 puntos)

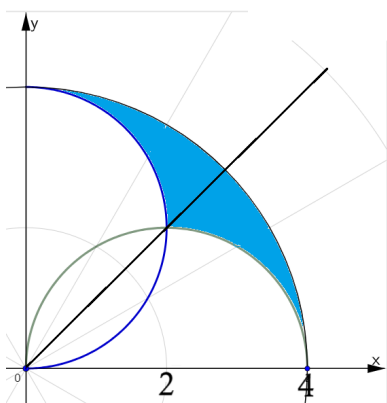
Un buzo se encuentra sumergido en un lago, cuya temperatura varía por la siguiente expresión $T(x, y, z) = 4 - x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}z^2$ [$^{\circ}C$] donde x representa el desplazamiento horizontal en metros, y representa el desplazamiento vertical en metros y z la profundidad en metros.



- a) (2 puntos) Considerando que el buzo se encuentra en el punto $A=(0,2,-1)$. ¿Qué dirección debe seguir el buzo para que la temperatura del lago aumente más rápido? y ¿Cuánto es esa temperatura máxima?
- b) (2 puntos) Si el buzo llega a la superficie del lago y suponiendo que la temperatura sobre la superficie está dado por $T(x, y) = x^2 + xy^2 - 2x + 1$ además $P(1, 0)$ es un punto crítico de la función temperatura ¿En el punto P se tiene la temperatura máxima, mínima o solo es un punto silla? Justificar con el cálculo.
- c) (2 puntos) Para la función temperatura del ítem(b), plantear las ecuaciones necesarias y determinar los puntos críticos.
- d) (2 puntos) Si la temperatura del lago por efectos del clima cambia a $T(x, y, z) = 2x + z^2$ se quiere determinar las temperaturas extremas (máximo y mínimo) en la región elíptica $x^2 + y^2 + 2z^2 = 25$ generada por los vientos.

Problema 2 (7 puntos)

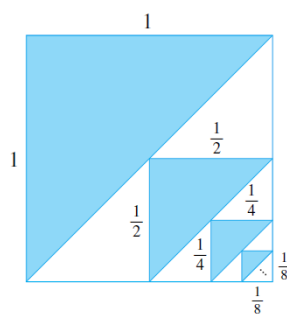
La región mostrada en la figura de la izquierda puede ser descrita por las curvas $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$ y la curva $x^2 + y^2 = 4a^2$



- (3 puntos) Identifique cada una de las curvas que limita la región indicada en coordenadas polares encontrando además el valor de la constante a .
- (2 puntos) Esboce la región transformada en el plano polar θ, r
- (2 puntos) Calcule el área de la región usando integrales dobles en coordenadas polares.

Problema 3 (5 puntos)

Considere la secuencia infinita de triángulos rectos sombreados en la figura mostrada.



- (2 puntos) Determina la expresión que representa el área del triángulo que corresponde al n ésimo triángulo formado.
- (2 puntos) Calcula el área total de los triángulos .
- (1 puntos) Determina a serie de Taylor en torno de $x = 0$ para la función $f(x) = (x+1)\ln(x+1)$

2. Adicional: Conceptual (3 Puntos)

- (1.5 puntos) Dado: $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr d\theta$ grafique la región de integración en coordenadas cartesianas, indicando las ecuaciones de las curvas que limitan la región, así como también, ¿Indique qué función se está integrando?, exprese en coordenadas cartesianas.
- (1.5 puntos) Para las siguientes afirmaciones coloque (V) si es verdad e indique en qué se basa la afirmación, en caso sea falso escriba un ejemplo que muestre que es falso.

- Si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a cero.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$ es convergente.

FORMULARIO:

- a) Sea la función $f(x, y)$ el cual tiene una restricción $g(x, y)$, los máximos y mínimos de f serán determinados por los multiplicadores de Lagrange λ , dados por

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

- b) Si se tiene una región R que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, entonces al realizar una integral de la función $f(x, y)$ en la región R es posible ver que:

$$\int \int_{R_{x,y}} f(x, y) dA = \int \int_{D_{r,\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

donde $D_{r,\theta}$ es la región en coordenadas polares.

- c) Sea una superficie $S : z = f(x, y)$. El área de esa región es dada por:

$$A(S) = \int \int_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dA$$

- d) **Criterio de la segunda derivada** Sea una función f con segundas derivadas parciales continuas en una región donde hay un punto (a, b) para el que se cumple $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$; es decir, (a, b) es un punto crítico. Para buscar los extremos relativos, se considera la expresión:

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

- 1) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.
- 2) $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.
- 3) $D < 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto silla.
- 4) Si $D = 0$ entonces el criterio no lleva a ninguna conclusión.

- e) **Serie Geométrica**

Cada término de ésta serie se generan a partir del término anterior multiplicándolo por una razón r

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

donde

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

- f) **Serie alternate**

Si la serie alternate

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

cumple con

- 1) $b_n > 0$ para todo n .
- 2) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n .
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

entonces la serie es convergente.

- g) **Criterio de la razón**

- 1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge.
- 2) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
- 3) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces la prueba no es concluyente; es decir, no se puede obtener conclusión alguna sobre la convergencia o divergencia de la serie.

- h) Si f se puede representar como una serie de potencias en a ; es decir, si:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

Entonces sus coeficientes están dados por la fórmula;

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Para el caso en el que $a = 0$, la serie que resulta se le llama **Serie de Maclaurin** de f .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$