

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO VECTORIAL

Ciclo 2023-I (Duración: 100 minutos)



Problema 1 (4 puntos)

Si la temperatura (en °C) en la superficie de una placa metálica es $T(x, y) = 20xy - 4x^3y + 2xy^2$, donde x e y se miden en centímetros, y posee 6 puntos críticos, entre ellos el $(-1, -4)$ y el $(1, -4)$. clasifíquelos según sea un máximo, mínimo o punto de silla de $T(x, y)$.

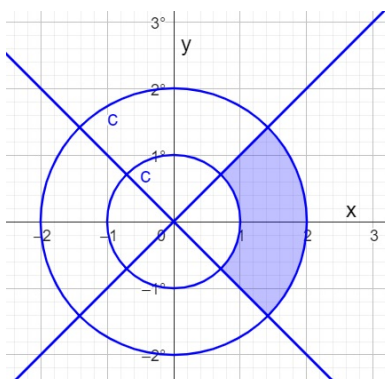
Problema 2 (5 puntos)

Supongamos que se invierten x operarios y y unidades de capital para producir relojes. La función $P(x, y) = 50x^{0.4}y^{0.6}$ representa la cantidad de relojes que se pueden fabricar. El objetivo es maximizar el número de relojes que se pueden producir con un presupuesto limitado de \$20,000, sabiendo que el costo de la mano de obra es de \$100 por operario y el costo del capital es de \$200 por unidad.

- Identifique la función objetivo y explique adecuadamente porque la relación que define la restricción es $100x + 200y = 20000$.
- Calcule el número máximo de relojes que se pueden producir con las restricciones dadas

Problema 3 (7 puntos)

En la figura se muestra un placa representada por la región sombreada.



- Hallar las ecuaciones en coordenadas polares que delimitan región sombreada y calcular su área con integrales dobles.
- Sabiendo que la masa del objeto es $M = \int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} dA$, hallar la densidad del objeto si $\rho = \frac{M}{A}$ donde M es la masa del objeto, y A el área del objeto.

Problema 4 (6 puntos)

- Se tiene una sucesión, donde los términos son : $x_n = \frac{5n^3 + 7n - 2}{4n^3 + 3}$. Determinar si la sucesión es convergente. De ser así, ¿a qué valor converge ?
- Determinar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \sin(2x)$.

FORMULARIO :

1. Sea la función $f(x, y)$ el cual tiene una restricción $g(x, y)$, los máximos y mínimos de f serán determinados por los multiplicadores de Lagrange λ , dados por

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

2. Si se tiene una región R que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, entonces al realizar una integral de la función $f(x, y)$ en la región R es posible ver que :

$$\int \int_{R_{x,y}} f(x, y) dA = \int \int_{D_{r,\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

donde $D_{r,\theta}$ es la región en coordenadas polares.

3. Sea una superficie $S : z = f(x, y)$. El área de esa región es dada por :

$$A(S) = \int \int_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dA$$

4. **Criterio de la segunda derivada** Sea una función f con segundas derivadas parciales continuas en una región donde hay un punto (a, b) para el que se cumple $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$; es decir, (a, b) es un punto crítico. Para buscar los extremos relativos, se considera la expresión :

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$$

- (a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.
(b) $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.
(c) $D < 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto silla.
(d) Si $D = 0$ entonces el criterio no lleva a ninguna conclusión.

5. Serie Geométrica

Cada término de ésta serie se generan a partir del término anterior multiplicándolo por una razón r

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

donde

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1-r}, & |r| < 1 \\ \infty, & |r| \geq 1 \end{cases}$$

6. Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum c_n$ series con términos no negativos. Supongamos que existe un entero N tal que :

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \text{ para todo } n > N$$

- (a) Si $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge.
(b) Si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

7. Serie alternate

Si la serie alternate

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

cumple con

- (a) $b_n > 0$ para todo n .
(b) $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n .
(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

entonces la serie es convergente.

8. Criterio de la razón

- (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge.
(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.
(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces la prueba no es concluyente; es decir, no se puede obtener conclusión alguna sobre la convergencia o divergencia de la serie.
9. Si f se puede representar como una serie de potencias en a ; es decir, si :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$$

Entonces sus coeficientes están dados por la fórmula;

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Para el caso en el que $a = 0$, la serie que resulta se le llama **Serie de Maclaurin de f** .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$