

Cálculo Vectorial

Examen Final
Pregrado
2022-2

Nombre del docente: _____

Alumno:

Apellidos: _____ Nombres: _____

Sección: _____ Fecha: _____

Nota :

Indicaciones:

- La duración es de 1h 40 min.
- La evaluación consta de 4 preguntas
- No se permite el uso de calculadora científica ni apuntes.
- Durante el desarrollo del examen, está prohibido hacer uso de aparatos electrónicos.
- Cualquier respuesta sin justificación o usando métodos o definiciones que no son parte del curso y/o no son los métodos pedidos en el problema específico, no se tomará en consideración y el puntaje en dicha pregunta será cero.

Problema 1 (5 puntos)

La función de producción de Cobb-Douglas para un fabricante de software está dada por:

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4}$$

- x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad).
- s representa las unidades de capital (a \$250 por unidad).

El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50000. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.

Problema 2 (5 puntos)

Evaluar la siguiente integral: $\iint_R (8x + 6xy) dA$ donde R es la región acotada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 9$ y $x^2 + y^2 = 16$ y que pertenece únicamente al primer cuadrante.

- a) Grafica la región plana donde se realizará la integral e indica los límites de integración.
- b) Plantea la doble integral y resuelve usando coordenadas polares (Si usa otro método no se calificará).

Problema 3 (5 puntos)

Sea la región R del plano XY, limitada por la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, por las rectas $y = x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}x}$

- a) Graficar la región R e indicar los límites de integración.
- b) Determinar el área de la región R . Utilice integrales dobles (Si usa otro método no se calificará).

Problema 4 (5 puntos)

Dada la siguiente serie: $S = \frac{(3x+5)}{2} + \frac{(3x+5)^2}{3} + \frac{(3x+5)^3}{4} + \dots$

- a) Determinar el radio y el intervalo de convergencia.
- b) Demostrar la convergencia o divergencia en los extremos.

- Sea la función $f(x, y)$ el cual tiene una restricción $g(x, y)$, los máximos y mínimos de f serán determinados por los **multiplicadores de Lagrange** λ , dados por

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

- Si se tiene una región R que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, entonces al realizar una integral de la función $f(x, y)$ en la región R es posible ver que

$$\int \int_{R_{x,y}} f(x, y) dA = \int \int_{D_{r,\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

donde D es la región de integración en coordenadas polares.

- Sea una superficie $S : z = f(x, y)$. El área de esa región es dada por

$$A(S) = \int \int_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dA$$

- Criterio de la segunda derivada**

Sea una función f con segundas derivadas parciales continuas en una región donde hay un punto (a, b) para el que se cumple $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico. Para buscar los extremos relativos, se considera la cantidad

$$D = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - |f_{xy}(a, b)|^2$$

Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$ entonces $f(a, b)$ es un mínimo relativo.

Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$ entonces $f(a, b)$ es un máximo relativo.

Si $D < 0$ entonces $f(a, b)$ es un punto silla.

Si $D = 0$ entonces el criterio no lleva a ninguna conclusión.

- Regla de L' Hospital**

Sean dos funciones f y $g \neq 0$, si existe el límite f'/g' entonces existe el límite f/g , y se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

- Serie geométrica**

Sea la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

donde $S_n = a + ar + ar^2 + \dots ar^n$

Si $|r| \geq 1$ entonces la serie diverge

Si $|r| < 1$ entonces la serie converge

■ Serie p

La serie p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge si $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Criterio de la comparación

Sean $\sum a_n$, $\sum b_n$ y $\sum c_n$ series con términos no negativos. Suponga que para algún entero N

$$b_n \leq a_n \leq c_n, \text{ para todo } n > N$$

a) Si $\sum c_n$ converge, entonces $\sum a_n$ también converge

b) si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

Serie alternante

Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

cumple con

I. $b_n > 0$ para todo n

II. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

entonces la serie es convergente.

Criterio de la razón

I. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge.

II. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.

III. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, entonces la prueba no es concluyente; es decir, no se puede obtener conclusión alguna sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Prueba de la raíz

I. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente y por lo tanto converge.

II. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.

III. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, entonces la prueba no es concluyente; es decir, no se puede obtener conclusión alguna sobre la convergencia o divergencia de la serie.

Radio de Convergencia

Para una serie de potencias general centrada en a de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots$$

donde x es una variable y c_n son los coeficientes de la serie, se cumple que solo hay 3 posibilidades

1. La serie converge solo cuando $x = a$ entonces $R = 0$

2. La serie converge para todo x , entonces $R = \infty$

3. Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$

donde R es llamado radio de convergencia.