

Apellido y nombre:

Instrucciones Generales:

- Se permite el uso de calculadora científica no programable.
- El puntaje máxima es de 20 puntos.

Puntaje Total: 24 puntos

Duración: 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN (6 puntos)

Responda **Verdadero (V)** o **Falso (F)** según corresponda. Justifique claramente cada una de sus respuestas.

1. [2 pts] Si A es una matriz simétrica 3×3 con valores propios $\lambda_1 = 4$ con $m.a.(4) = 2$ (multiplicidad algebraica 2) y $\lambda_2 = 1$, ¿es posible que el espacio propio asociado a $\lambda = 4$ tenga dimensión 1? Justifique su respuesta.

2. [2 pts] Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Es A diagonalizable ortogonalmente? Justifique.

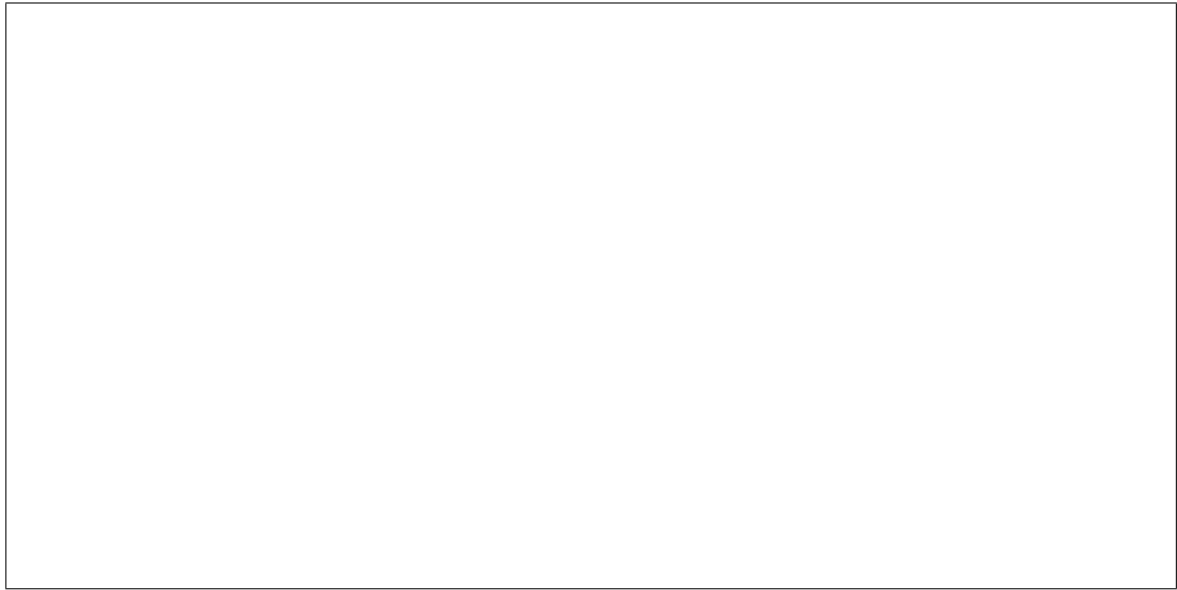
3. [2 pts] Sea A una matriz 5×3 con rango 2. En su SVD $A = U\Sigma V^T$, el número de columnas de U que corresponden a valores singulares no nulos es 2.

PROCEDIMENTAL (7 puntos)

4. [7 pts] Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$.

- a) [4 pts] Determine una base para cada uno de los espacios propios de A (vectores propios) verificando que el espacio propio de $\lambda = 2$ es $E_2 = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- b) [3 pts] Diagonalice ortogonalmente la matriz A , si es posible. Es decir, encuentre matrices P ortogonal y D diagonal tal que $A = PDP^T$. Si no es posible, explique por qué.



APLICACIONES (7 puntos)

5. [7 pts] Una pequeña startup de e-commerce quiere analizar los patrones de interacción de sus clientes con un conjunto reducido de productos. Para ello, ha registrado en una matriz binaria si cada cliente ha interactuado (valor 1) o no (valor 0) con ciertos productos. La siguiente matriz A resume la información recolectada, donde las filas representan a los clientes (C1, C2, C3, C4) y las columnas a los productos (P1, P2, P3):

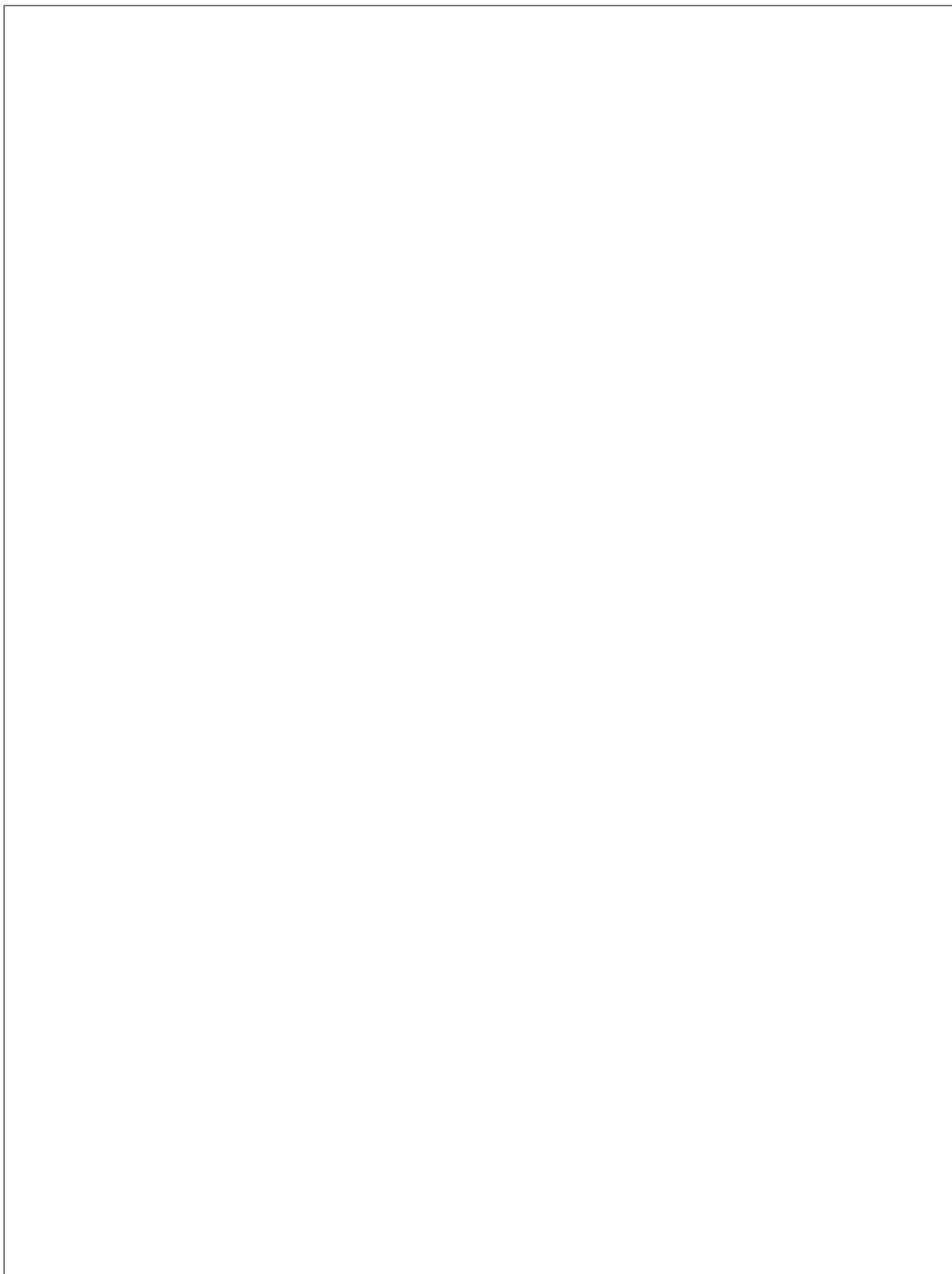
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se sabe que los valores propios de $A^T A$ son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$, con bases de los espacios propios dadas por:

- Para $\lambda = 4$: $E_4 = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$
- Para $\lambda = 0$: $E_0 = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- a) [3 pts] A partir de la información dada, determine las matrices V y Σ de la descomposición en valores singulares $A = U\Sigma V^T$.) Observe que $\text{rank}(A) = 1$

- b) [**3 pts**] Si la matriz $U = [\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_3 | \mathbf{u}_4]$ utilice las matrices obtenidas en el ítem anterior para completar la matriz U si $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- c) [**1 pts**] Obtenga la mejor aproximación de rango 1 de la matriz A , e interprete brevemente qué representa esta aproximación en el contexto del problema.



Adicional (4 puntos)

6. [2 ptos] Describa brevemente el problema o modelo que desarrolló en su proyecto de curso. Explique específicamente cómo utilizó al menos uno de los siguientes conceptos de Álgebra Lineal en su proyecto:

- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Valores y vectores propios.
- Transformaciones lineales.
- Factorizaciones matriciales (ej. LU, QR, SVD).
- Espacios vectoriales o subespacios.

Indique qué logró o qué conclusiones obtuvo gracias a la aplicación de dicho concepto.

7. [2 ptos] **DESAFIO.** Dado un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ una base ortonormal de dicho subespacio. Definimos la matriz de proyección sobre el subespacio S como la matriz $A = QQ^T$, donde $Q = [v_1 v_2 \cdots v_m]$ es una matriz de orden $n \times m$ cuyas columnas son los vectores de la base $\mathcal{B}$.

Demuestre que:

- a) A es simétrica ($A^T = A$) e idempotente ($A^2 = A$).
- b) Los valores propios de A son 0 ó 1.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Para convertir una base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ de un subespacio W en una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ para W :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{u}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v}_j}{\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j} \mathbf{v}_j\end{aligned}$$

Para una base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\}$, normalizar cada $\mathbf{v}_i$: $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|}$.

Factorización QR

Si A es una matriz $m \times n$ con columnas linealmente independientes $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, entonces A se puede factorizar como $A = QR$, donde Q es una matriz $m \times n$ cuyas columnas forman una base ortonormal para $\text{Col}(A)$, y R es una matriz $n \times n$ triangular superior invertible con entradas diagonales positivas. Las columnas de $Q = [\mathbf{q}_1 \dots \mathbf{q}_n]$ se obtienen aplicando Gram-Schmidt a las columnas de A .

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_1 & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{a}_n \\ 0 & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{q}_2^T \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

(Note: $r_{ij} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j$ para $i \leq j$).

Recordar: Una matriz Q cuadrada es ortogonal si $Q^T = Q^{-1}$.

Diagonalización de una matriz

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **diagonalizable** ($A = PDP^{-1}$) si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1. A posee n autovectores linealmente independientes

2. Para cada autovalor λ de A , se verifica:

$$\text{mg}(\lambda) = \text{ma}(\lambda).$$

(Recordar que siempre se cumple $\text{mg}(\lambda) \leq \text{ma}(\lambda)$),

Diagonalización Ortogonal

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A es una matriz simétrica. Si A es simétrica, entonces $A = PDP^T = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de A , y P es una matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios ortonormales de A . Para ello si es necesario puede usar Gram Smith. Si usted verifica que los vectores propios ya son ortogonales no será necesario usar Gram Smith, solo sería necesario normalizar.

Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Sea A una matriz $m \times n$ de rango r . Entonces $A = U\Sigma V^T$, donde:

- V es una matriz ortogonal $n \times n$. Las columnas de V son vectores propios ortonormales de $A^T A$, o sea la diagonaliza ortogonalmente.
- Σ es una matriz $m \times n$. Sus entradas $(\Sigma)_{ii} = \sigma_i$ para $1 \leq i \leq r$ son los valores singulares ($\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, donde λ_i son los valores propios no nulos de $A^T A$, ordenados $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$). Todas las demás entradas de Σ son cero.
- U es una matriz ortogonal $m \times m$ de cualquiera de las siguientes dos formas

1. Las primeras r columnas de U pueden hallarse $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i$ para $i = 1, \dots, r$, y luego completando los restantes columnas de modo que tengamos una matriz ortogonal, o
2. tomando U como la matriz que ortogonaliza la matriz AA^T .